TEMA 2. MODELO DE SELECCIÓN DE CARTERAS DE MARKOWITZ

Dr. Borja Amor Tapia
borja.amor@unileon.es
Área de Economía Financiera

1. Hipótesis

1. La amplitud del horizonte temporal de inversión es un único periodo.
2. La rentabilidad de dos activos durante el periodo de tiempo dado es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad para el citado periodo es conocida por el inversor
3. La esperanza matemática y la desviación típica de la variable anterior constituyen la rentabilidad esperada y el riesgo soportado, respectivamente.
4. Los inversores basan sus decisiones únicamente en función de la rentabilidad y riesgo esperados
5. Todos los inversores tienen un comportamiento racional con aversión al riesgo, prefiriendo, para un determinado nivel de riesgo, una rentabilidad más elevada que una más baja. O, para cualquier nivel de rentabilidad, los inversores prefieren un riesgo menor a uno mayor.
6. No existen impuesto ni inflación, y los costes de transacción en la negociación de los títulos son irrelevantes.
7. Todas las inversiones son perfectamente divisibles, pudiéndose comprar cualquier fracción de un activo.

2. La Rentabilidad Esperada de las Carteras

Carteras con *n* Clases de Activos

Carteras con *dos* Clases de Activos

Carteras con *n* Clases de Activos

$$P : r_p \rightarrow \left(E_p, \sigma_p\right)$$

$$P \equiv \left(E_p, \sigma_p\right)$$

$$r_p = x_1 r_1 + \ldots + x_n r_n = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$$

- En forma matricial, el vector de tantos unitarios (o vector de proporciones, o vector de ponderaciones) es:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- El vector de rentabilidades esperadas de los *n* títulos es:

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \dots \\ E_n \end{pmatrix}$$

- Recordando la multiplicación de un vector fila por un vector columna, la rentabilidad esperada de una cartera se obtiene mediante la expresión:

$$E_p = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \ldots \\ E_n \end{pmatrix}$$

- O, lo que es equivalente:

$$E_p = X'_p E$$

Carteras con *dos* Clases de Activos

- En el caso particular de que sólo se invierta en dos clases de títulos, y haciendo:
  - $x_1 = x$
  - $x_2 = 1 - x$
- Tenemos:
  - $E_p = xE_1 + (1 - x)E_2$

3. El Riesgo de las Carteras

Carteras con *n* Clases de Activos

Carteras con *dos* Clases de Activos

Carteras con *n* Clases de Activos

- Y que el vector de proporciones y la matriz de varianzas-covarianzas:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

- Teniendo en cuenta el producto de matrices, y sabiendo que la forma cuadrática de X se define por la expresión $X'AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$

- La varianza de la cartera se puede determinar por la expresión

$$\sigma_p^2 = X'SX$$

- La raíz cuadrada positiva de la expresión anterior nos da el riesgo o volatilidad de la cartera

$$\sigma_p = \left(X' S X \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Cuando en lugar de distribuir el presupuesto entre los distintos activos, se invierta exclusivamente en el de mayor riesgo de los n disponibles, el riesgo de la cartera coincidirá con el de dicho activo.

- El riego de cualquier cartera toma un valor no superior al del activo de mayor riesgo, y como mínimo, un valor no nulo:

$$0 \leq \sigma_p \leq \max.(\sigma_i)$$

- Por tanto, tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones básicas:

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i = X'E$$

$$\sigma_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1_{i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_p = \left(X' \mathrm{S} X \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

- Cuando se conoce la matriz formada por los coeficientes de correlación lineal de las rentabilidades esperadas de los activos, podemos obtener una expresión específica para calcular el riesgo de la cartera. Así, sea *C* la citada matriz,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2n} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \dots & \rho_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Teniendo en cuenta la expresión matricial de la varianza de la cartera y la del coeficiente de correlación lineal, definimos:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X_c = \begin{pmatrix} x_1\sigma_1 \\ x_2\sigma_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n\sigma_n \end{pmatrix}$$

- De acuerdo con el concepto de producto de matrices, queda:

$$\sigma_p^2 = X_c' C X_c$$

- La expresión de la rentabilidad es la ya conocida: $E_p = X'E$

Carteras con *dos* Clases de Activos

- Si las carteras a formar están integradas sólo por dos activos, todas las expresiones anteriores quedan simplificadas, pudiéndose realizar algunos cálculos sin necesidad de utilizar matrices. Haciendo $x_1 = x; x_2 = 1 - x$, tenemos, por ejemplo, para la varianza del rendimiento esperado de una cartera y para la covarianza entre el rendimiento esperado de un activo y el de la cartera:

$$\sigma_p^2 = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-\mathrm{x})\sigma_{12} = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-\mathrm{x})\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

$$\sigma_{ip} = x^2\sigma_{i1} + (1-x)\sigma_{i2}$$

4. La Diversificación del Riesgo

Carteras con *n* Clases de Activos

Carteras con *dos* Clases de Activos

Carteras con *n* Clases de Activos

- Sabemos que el riesgo de una cartera p verifica:

$$\sigma_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1_{i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Por ello, los tres factores que determinan el riesgo son: las proporciones en que invierten los títulos; el riesgo de cada uno; y la covarianza con los demás.
- Además, de la expresión anterior se deduce que, al combinar títulos positivamente correlacionados, el riesgo no puede eliminarse completamente, aunque puede disminuirse, pesto que el sumando $\sum_{i=1_{i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$ puede disminuir si las covarianzas disminuyen

- En general, formada una cartera con n títulos, sabemos que la expresión que permite calcular la varianza de la rentabilidad es:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1_{i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

- Si todas las rentabilidades esperadas de los activos están lineal y positivamente correlacionadas, $\rho_{ij} = 1\ \forall (i,j)$, tenemos:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_j \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i \right)^2$$

- Por tanto: $$\sigma_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + \ldots + x_n\sigma_n$$

- Formada una determinada cartera con un cierto vector de proporciones, si todos los coeficientes de correlación lineal son iguales a la unidad, el riesgo de la cartera es la media ponderada de los riesgos de los títulos que la forman, siendo las ponderaciones las proporciones en las que los activos participan en la cartera.

- En general se dice que existen ventajas en la diversificación al formar una cartera, si su riesgo es inferior a la media ponderada de los riesgos de los títulos que la forman. Cuanto más bajo sea el riesgo más eficiente es la diversificación.

Carteras con *dos* Clases de Activos

- En función del coeficiente de correlación lineal, el riesgo de una cartera de n clases de títulos, cuando su rentabilidad están lineal y positivamente correlacionadas, $\rho_{ij} = 1$, es la media ponderada del riesgo de los activos:

$$\sigma_p = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + \ldots + x_n\sigma_n$$

- También sabemos que el riesgo de una cartera decrece al hacerlo el coeficiente de correlación lineal. Para dos clases de títulos, el riesgo de cualquier cartera se obtiene según la expresión:

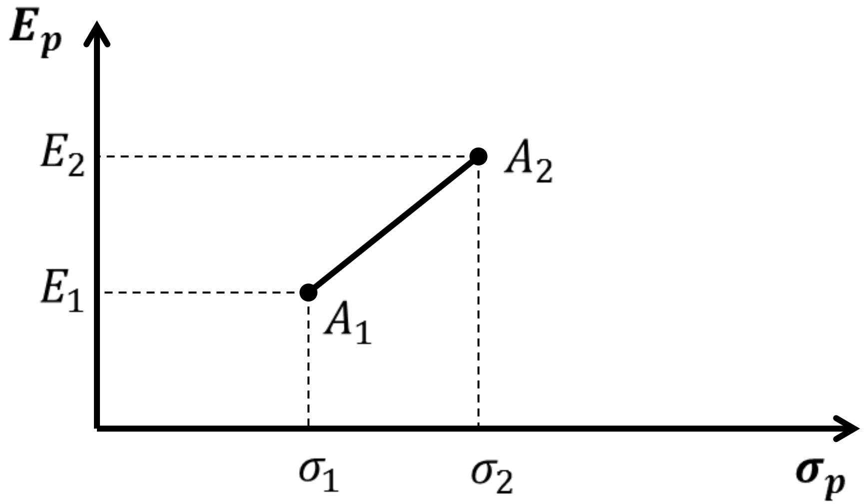
$$\sigma_p = \left[x^2\sigma_1^2 + (1-x^2)\sigma_2^2 + 2x(1-\mathrm{x})\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \right]^{\frac{1}{2}}$$

- Por tanto, para carteras de 2 activos, es importante analizar las siguientes hipótesis en función del valor del coeficiente de correlación lineal:
    - $\rho_{12} = 1$
    - $\rho_{12} = 0$
    - $\rho_{12} = -1$

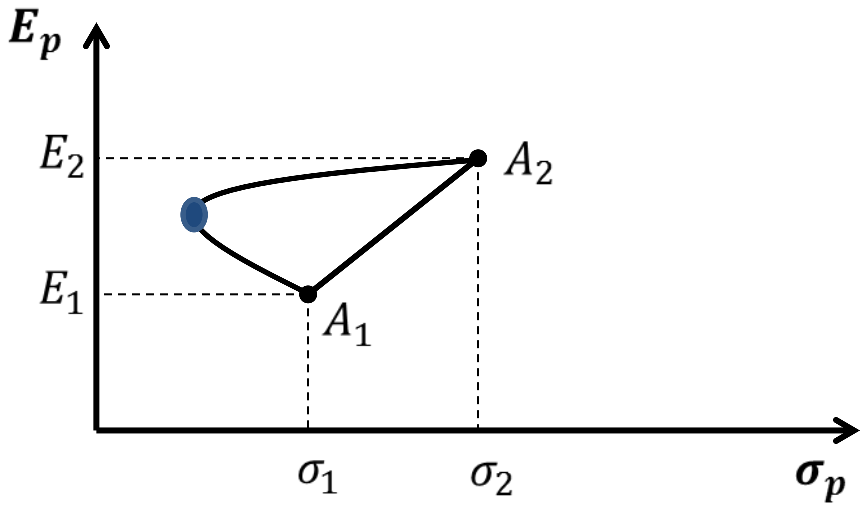
$\rho_{12} = 1$

- Por tanto, la relación entre la rentabilidad esperada y el riesgo es lineal, viniendo dada por la ecuación: $E_p = a + b\sigma_p$, siendo:

$$a = \frac{E_1\sigma_2 - E_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \qquad b = \frac{E_2 - E_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

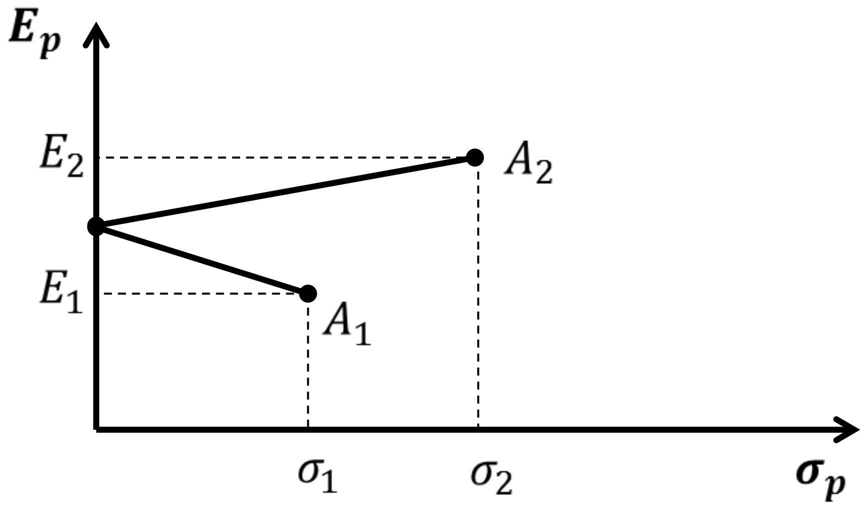


$\rho_{12} = 0$



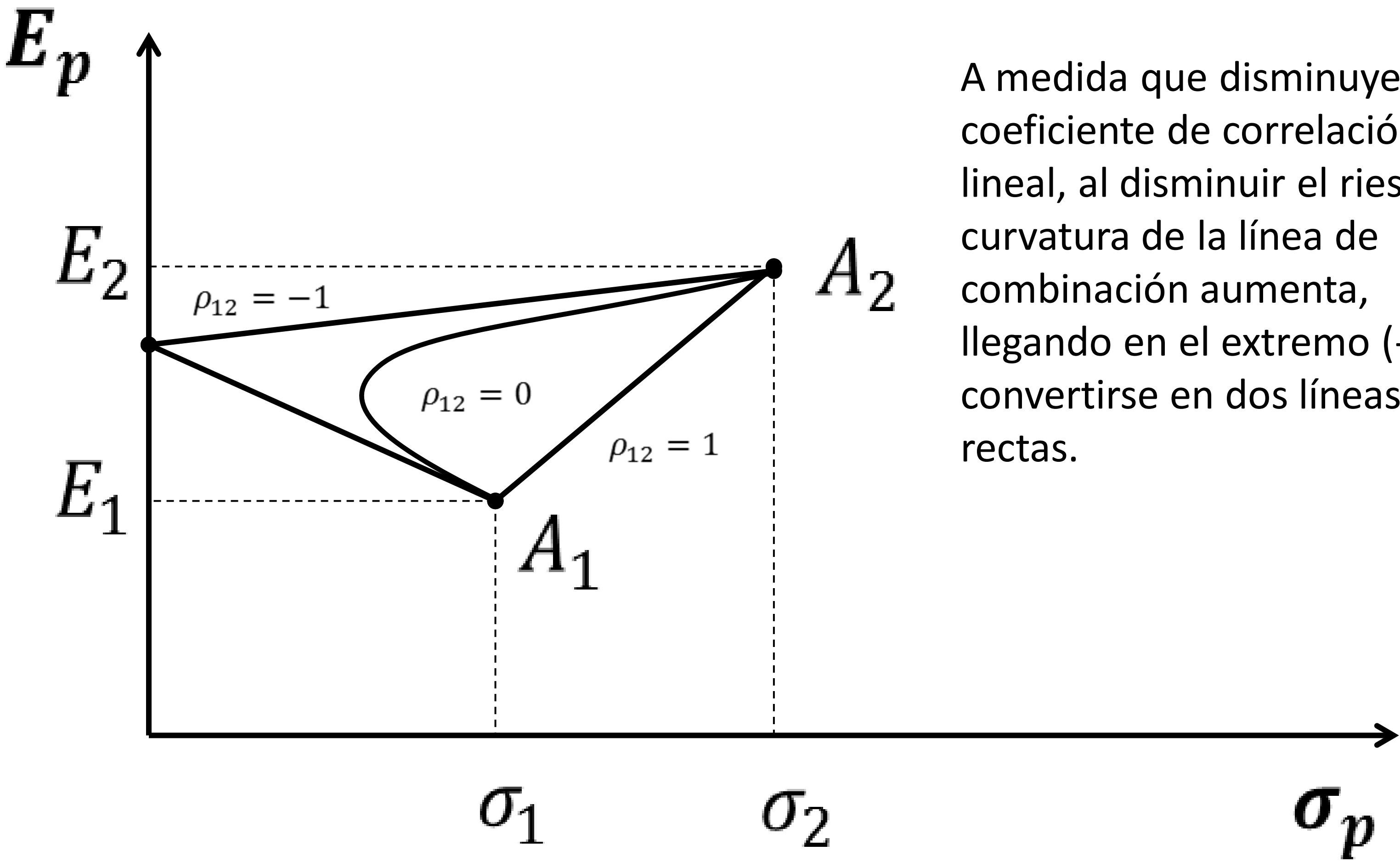
$$\rho_{12} = -1$$

- Gráficamente:



De las carteras situadas en las rectas anteriores, cualquier inversor racional elegirá exclusivamente las situadas en la línea superior, pues a igual riesgo que las situadas en la recta inferior, tienen mayor rentabilidad. Además, la línea superior tiene pendiente positiva, por lo que ante un aumento del riesgo se produce también un aumento de la rentabilidad. En cambio, la línea inferior tiene pendiente negativa, por lo que ante un aumento del riesgo se produce una disminución de la rentabilidad, lo cual es absurdo.

Resumiendo los tres casos estudiados…



A medida que disminuye el coeficiente de correlación lineal, al disminuir el riesgo, la curvatura de la línea de combinación aumenta, llegando en el extremo (-1) a convertirse en dos líneas rectas.

- En general, dados *n* títulos, se forma con ellos dos carteras, *p* y *q*, con vectores respectivos X e Y. Si con esas dos carteras se forma otra cartera A, invirtiendo *a* en *p* y *(1 – a)* en *q*, realmente la cartera A es exactamente la cartera obtenida al combinar los *n* títulos, siendo su vector de proporciones C. Los elementos de dicho vector son la media ponderada de los correspondientes al vector X de *p* e Y de *q*, siendo los respectivos factores de ponderación *a* y *(1 – a).* Por tanto, se verifica:

$$aX + (1-a)Y = C$$

$$ax_i + (1-a)y_i = c_i \quad \forall i = 1,2,...,n$$

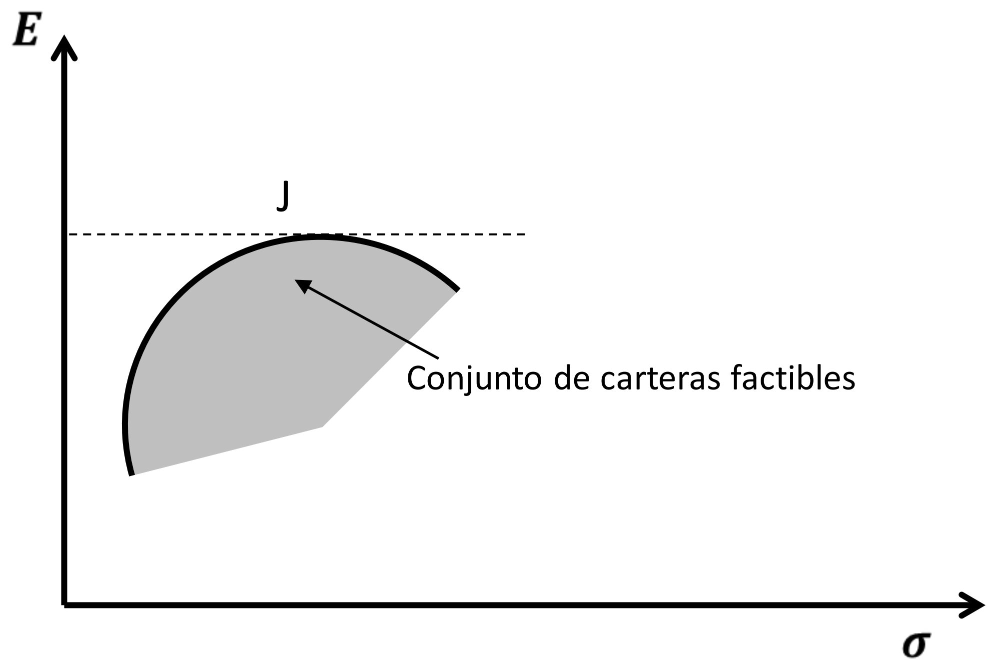
$$\begin{pmatrix} ax_1 + (1-a)y_1 \\ ax_2 + (1-a)y_2 \\ ax_3 + (1-a)y_3 \\ ... \\ ax_n + (1-a)y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} = C$$

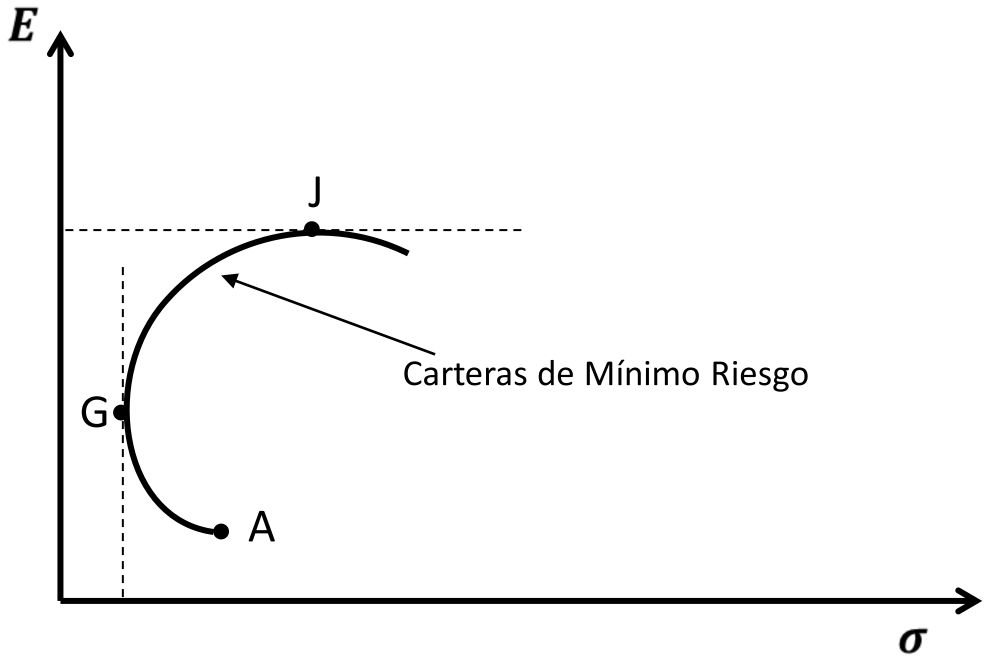
5. Carteras de Menor Varianza

Frontera de mínimo Riesgo

Cartera de mínimo Riesgo

Frontera de Mínimo Riesgo




E
J
Carteras de Mínimo Riesgo
G
A
σ

- El conjunto de carteras de mínimo riesgo, para cada valor de la rentabilidad esperada, es el representado por la línea AGJ, pues cualquier cartera situada a la derecha de la cartera J no es de mínimo riesgo.

- Cualquier cartera de menor varianza, con vector de proporciones X, es el resultado del siguiente problema de optimización:

$$\text{Minimizar } \sigma_p^2 = X'SX$$

$$\{x_i;\ i = 1,2,\ldots,\mathrm{n}\}$$

Restricciones

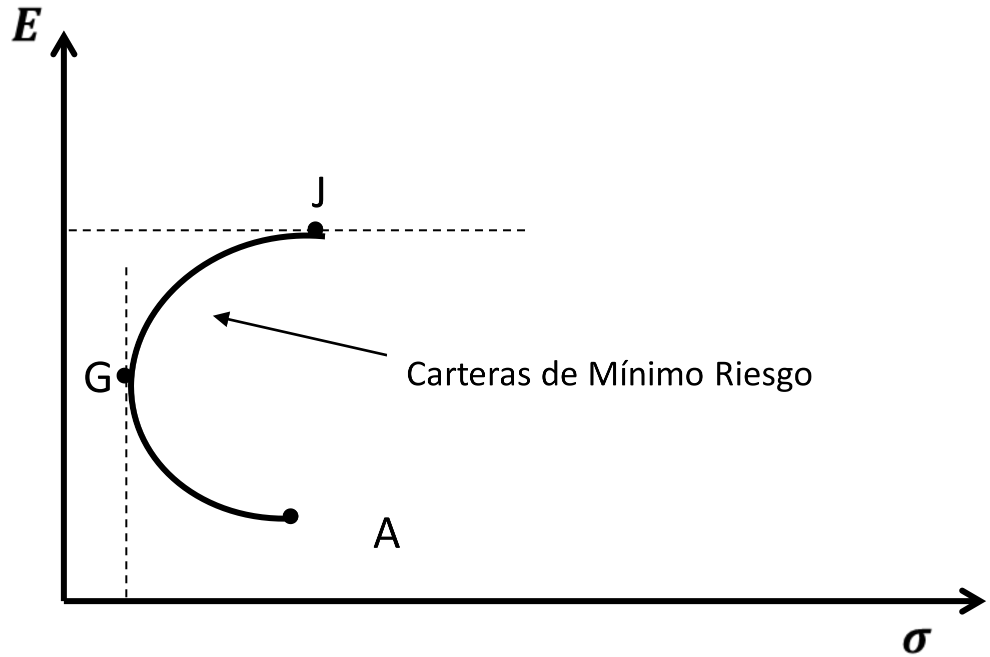
$$E_p = X'\mathrm{E} = \mathrm{E}_p^*$$

$$\sum_1^n x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Cartera de Mínimo Riesgo Global

- De entre todas las carteras de la frontera de mínimo riesgo, a la cartera con menor riesgo se le denomina cartera de mínimo riesgo global. En el siguiente gráfico, es la cartera G, puesto que a la izquierda de la misma no existen posibilidades de inversión.



- La composición, riesgo y rentabilidad de dicha cartera se obtiene al optimizar:

$$\text{Minimizar } \sigma_p^2 = X'SX$$

$$\{x_i;\ i = 1,2,\ldots,\mathrm{n}\}$$

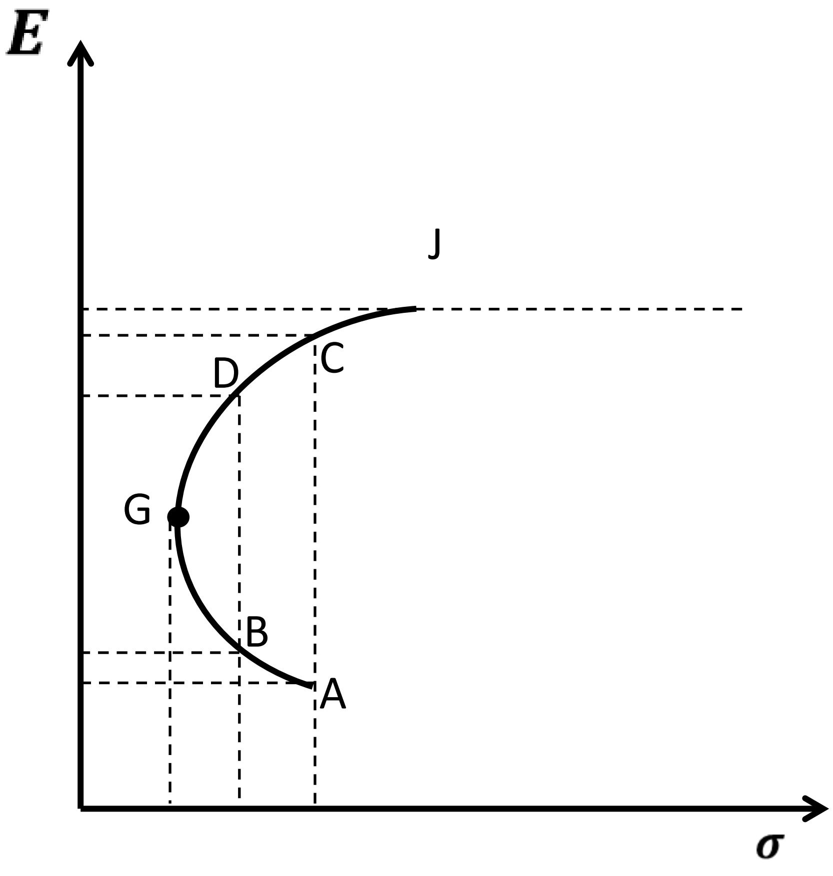
Restricciones

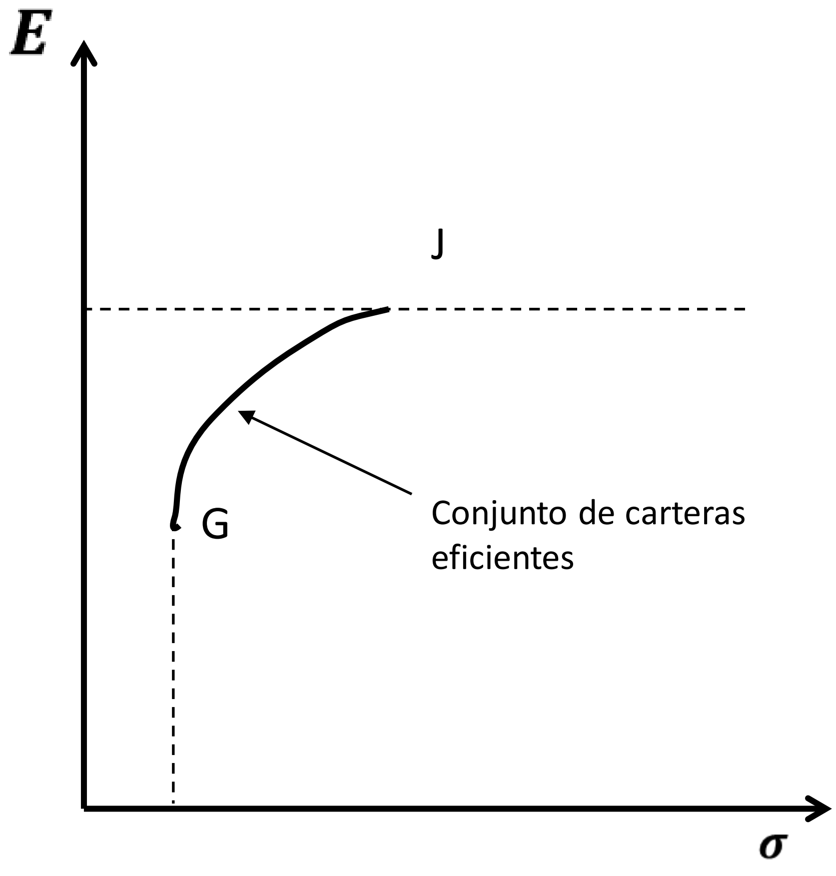
$$\sum_{1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

6. Carteras Eficientes

- De entre dos inversores de igual rentabilidad es preferida la de menor riesgo.
- Por tanto, dentro del conjunto de posibilidades de inversión, cualquier inversor racional elegirá su cartera de entre las situadas en la frontera de mínimo riesgo.
- De estas carteras, elegirá entre las situadas por encima de la de mínimo riesgo global, pues para cada cartera situada por debajo existe una cartera en la parte superior que ofrece mayor rentabilidad para el mismo riesgo.


E
J
D
C
G
B
A
σ


E
J
G
Conjunto de carteras eficientes
σ

7. Selección de la Cartera Óptima